Algoritma *Branch and Bound*

Bahan Kuliah IF2251 Strategi Algoritmik

Oleh: Rinaldi Munir

Algoritma *Branch and Bound*

- Algoritma *Branch and Bound* (B&B) juga merupakan metode pencarian di dalam ruang solusi secara sistematis.

- Algoritma runut-balik → skema DFS
- Algoritma B&B → skema BFS

- Untuk mempercepat pencarian ke simpul solusi, maka setiap simpul diberi sebuah nilai ongkos (*cost*).

- Simpul berikutnya yang akan diekspansi tidak lagi berdasarkan urutan pembangkitannya (sebagaimana pada BFS murni),

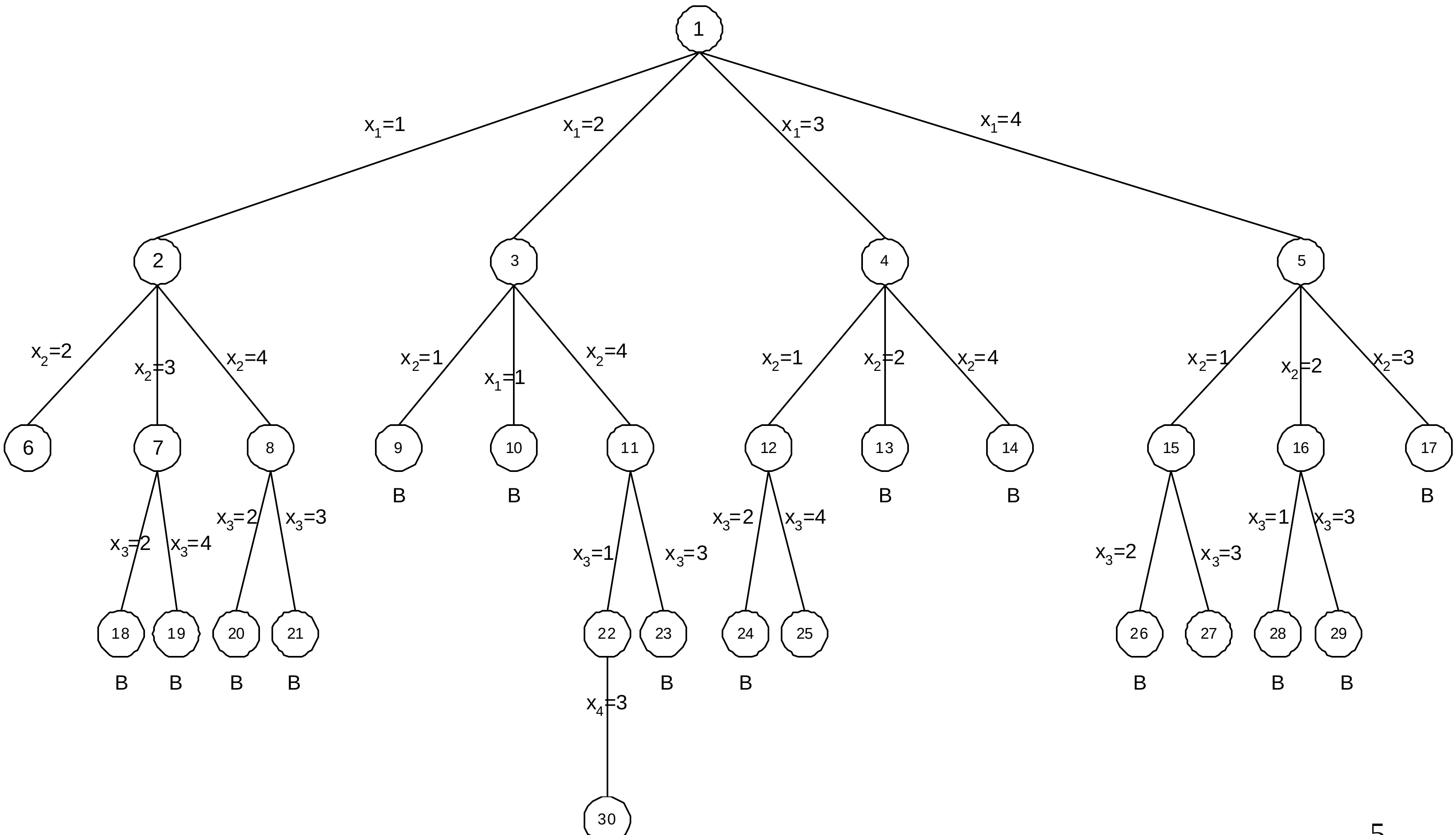
- tetapi simpul yang memiliki ongkos yang paling kecil (*least cost search*) – pada kasus minimasi.

- Nilai ongkos pada setiap simpul *i* menyatakan taksiran ongkos termurah lintasan dari simpul *i* ke simpul solusi (*goal node*):

$\hat{c}(i)$ = nilai taksiran lintasan termurah dari simpul status *i* ke status tujuan

- Dengan kata lain, $\hat{c}(i)$ menyatakan batas bawah (*lower bound*) dari ongkos pencarian solusi dari status *i*.

Tinjau kembali persoalan 4-ratu yang diselesaikan dengan skema BFS (murni).



- Solusi pertama dicapai pada simpul 30, yaitu $X = (2, 4, 1, 3)$.

- Dengan skema BFS murni / FIFO, kita harus memperluas dulu simpul 12, simpul 15, dan simpul 16 sebelum memperluas simpul 22 yang melahirkan simpul solusi, yaitu simpul 30.

- Pada algoritma B&B, pencarian ke simpul solusi dapat dipercepat dengan memilih simpul hidup berdasarkan nilai ongkos (*cost*).

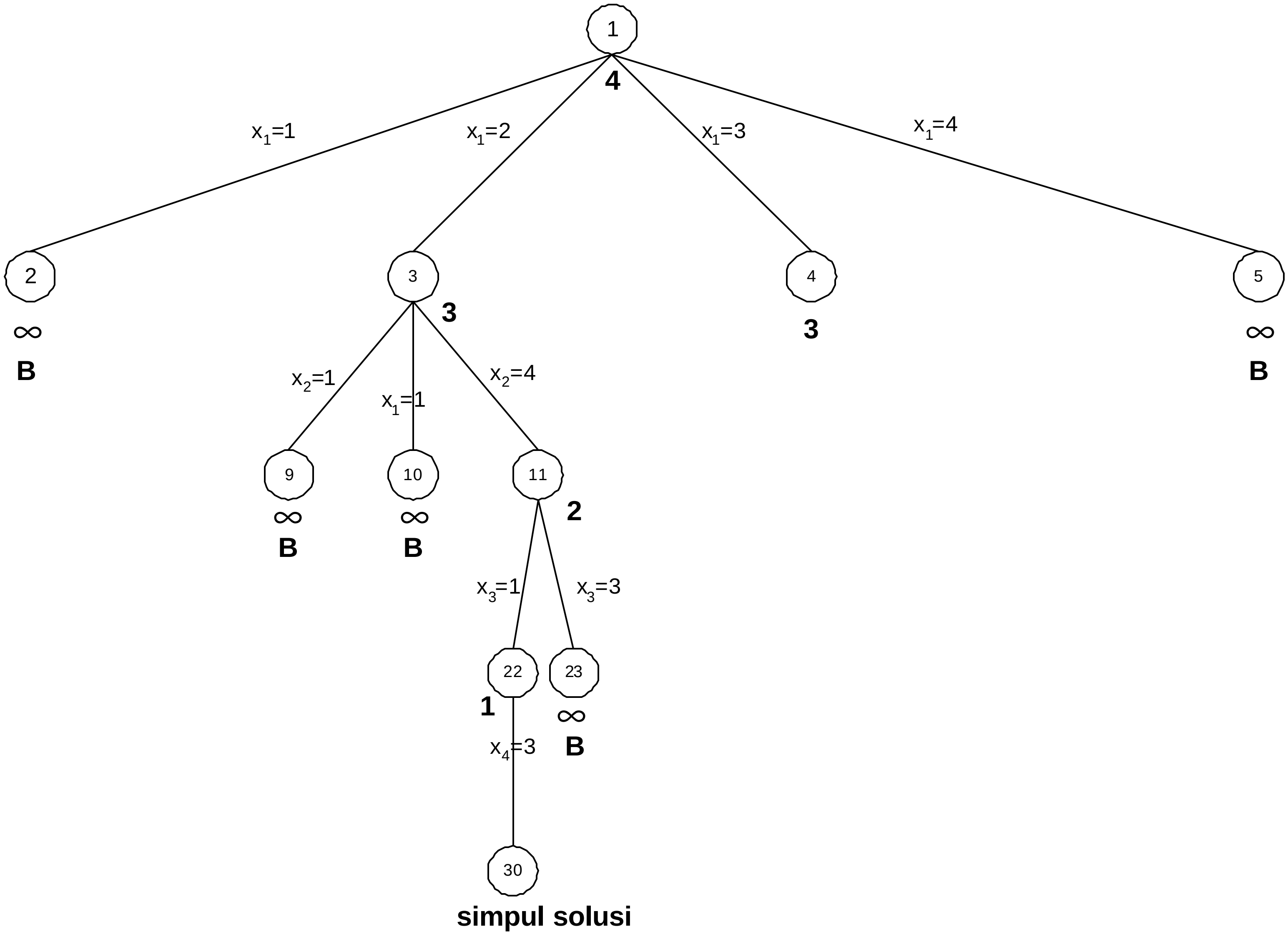
- Setiap simpul hidup diasosiasikan dengan sebuah ongkos yang menyatakan nilai batas (*bound*).

- Simpul hidup yang menjadi simpul-E ialah simpul yang mempunyai nilai batas terkecil (strategi **pencarian berdasarkan biaya terkecil** (*least cost search*)).

- Untuk setiap simpul *X*, nilai batas ini dapat berupa [HOR78]:

1. jumlah simpul dalam upapohon *X* yang perlu dibangkitkan sebelum simpul solusi ditemukan, atau
2. panjang lintasan dari simpul *X* ke simpul solusi terdekat (dalam upapohon *X* ybs)

- Misal digunakan ukuran (b):


1
4
x1=1
x1=2
x1=3
x1=4
2
∞
B
3
3
4
3
5
∞
B
x2=1
x1=1
x2=4
9
∞
B
10
∞
B
11
2
x3=1
x3=3
22
1
23
∞
B
x4=3
30
simpul solusi

- Pemberian nilai batas seperti pada persoalan N-Ratu di atas adalah nilai batas yang ideal, karena letak simpul solusi diketahui.

- Pada umumnya, untuk kebanyakan persoalan, letak simpul solusi tidak diketahui,

- karena itu, dalam prakteknya, nilai batas untuk setiap simpul umumnya berupa taksiran atau perkiraan.

- Fungsi heuristik untuk menghitung taksiran *cost*:

$$\hat{c}(i) = \hat{f}(i) + \hat{g}(i)$$

$\hat{c}(i)$ = ongkos untuk simpul i

$\hat{f}(i)$ = ongkos mencapai simpul i dari akar

$\hat{g}(i)$ = ongkos mencapai simpul tujuan dari simpul i.

- Simpul berikutnya yang dipilih untuk diekspansi adalah simpul yang memiliki $\hat{c}$ minimum.

Algoritma B&B:

1. Masukkan simpul akar ke dalam antrian Q. Jika simpul akar adalah simpul solusi (*goal node*), maka solusi telah ditemukan. Stop.

2. Jika Q kosong, tidak ada solusi. Stop.

3. Jika Q tidak kosong, pilih dari antrian Q simpul i yang mempunyai $\hat{c}(i)$ paling kecil. Jika terdapat beberapa simpul i yang memenuhi, pilih satu secara sembarang.

4. Jika simpul i adalah simpul solusi, berarti solusi sudah ditemukan, stop. Jika simpul i bukan simpul solusi, maka bangkitkan semua anak-anaknya. Jika i tidak mempunyai anak, kembali ke langkah 2.

5. Untuk setiap anak j dari simpul i, hitung $\hat{c}(j)$, dan masukkan semua anak-anak tersebut ke dalam Q.
6. Kembali ke langkah 2.

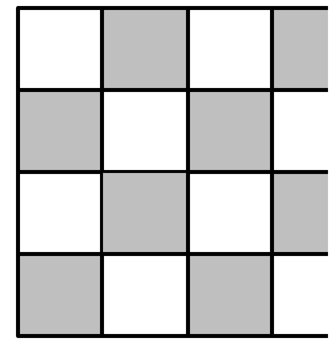
Permainan 15-*Puzzle*

1	3	4	15
2		5	12
7	6	11	14
8	9	10	13

(a) Susunan awal

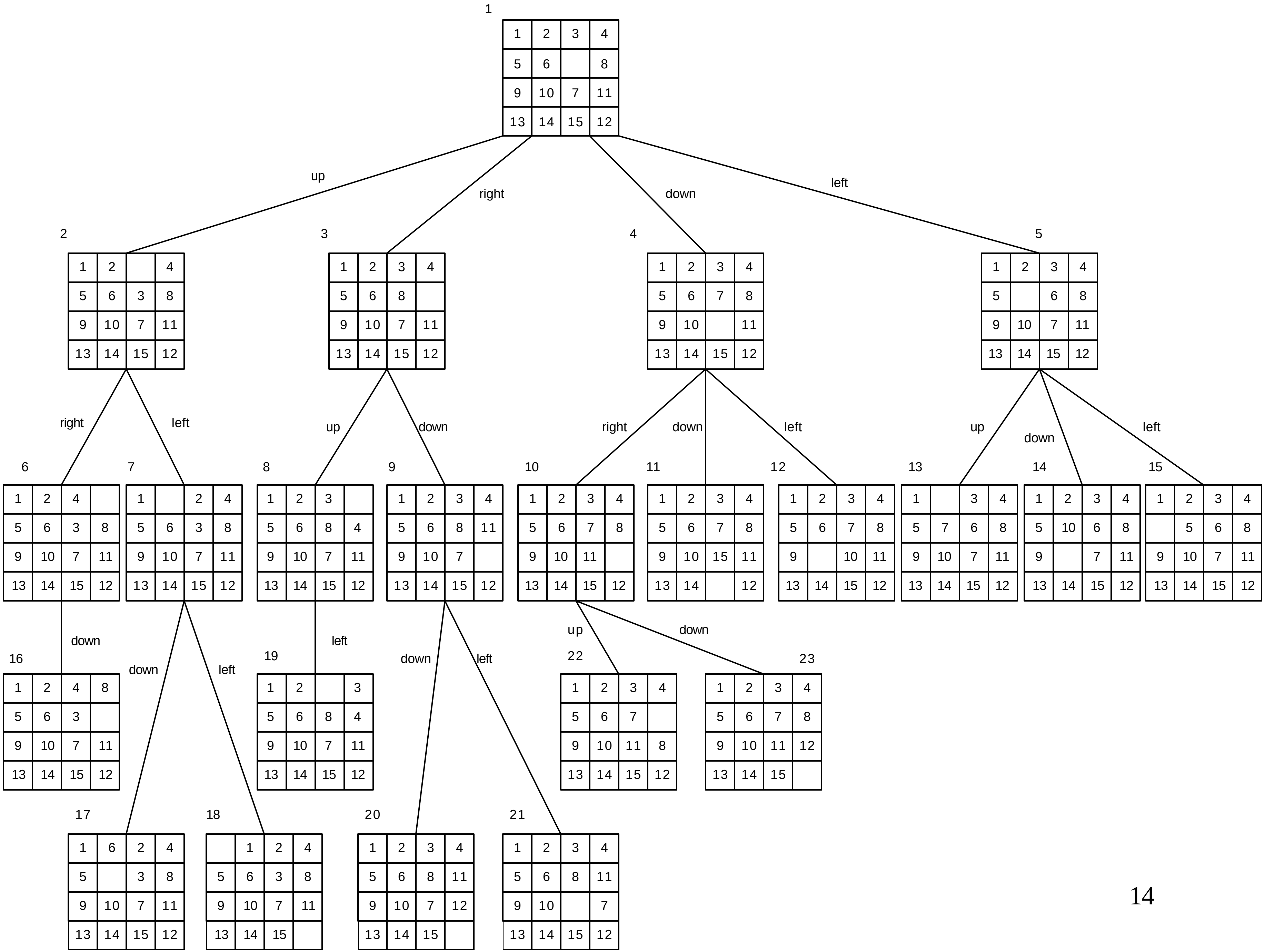
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(b) Susunan akhir



(c)

- Terdapat 16! (= $20{,}9 \times 10^{12}$) susunan ubin yang berbeda pada bidang kerangka


1
up
right
down
left
2
3
4
5
right
left
up
down
right
down
left
up
down
left
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
down
down
left
left
down
left
up
down
16
17
18
19
20
21
22
23

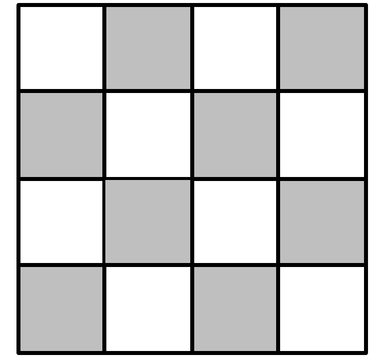
- Sebelum menelusuri ruang status untuk mencapai susunan akhir, kita patut menentukan apakah status tujuan dapat dicapai atau tidak dari status awal.

- $POSISI(i)$ = posisi ubin bernomor i pada susunan akhir.

- $KURANG(i)$ = jumlah ubin j sedemikian sehingga $j < i$ dan $POSISI(j) > POSISI(i)$.

1	3	4	15
2		5	12
7	6	11	14
8	9	10	13

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	



Misalkan $X = 1$ jika pada status awal slot kosong berada pada salah satu posisi yang diarsir pada Gambar 7.3c, dan $X = 0$ jika slot kosong berada pada posisi lainnya.

- **Teorema 8.1.** Status tujuan hanya dapat dicapai dari status awal jika

$$\sum_{i=1}^{16} KURANG(i) + X$$

bernilai genap.

- Pada Gambar 7.2a mempunyai X = 0 dan $\sum_{i=1}^{16} KURANG(i) = 37$, sehingga 37 + 0 = 37 (ganjil).

- Oleh karena itu, status tujuan tidak dapat dicapai dari status awal pada Gambar 7.2a.

- **Algoritma B&B:**

Nilai ongkos untuk simpul *P*: $\hat{c}(P) = f(P) + \hat{g}(P)$

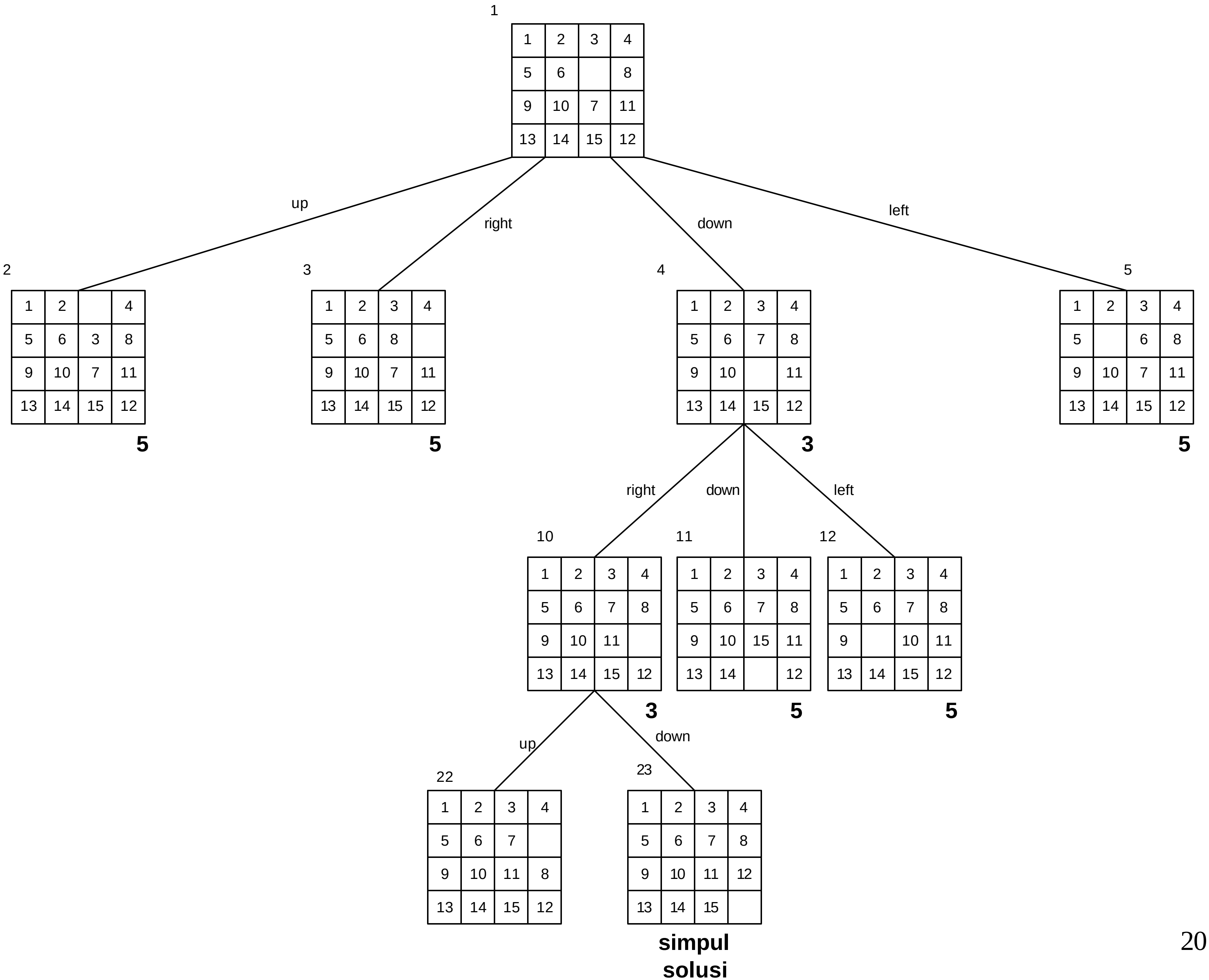
$f(P)$ = adalah panjang lintasan dari simpul akar ke *P*

$\hat{g}(P)$ = taksiran panjang lintasan terpendek dari *P* ke simpul solusi pada upapohon yang akarnya *P*.

- Salah satu cara menghitung $\hat{g}(P)$:

  $\hat{g}(P)$ = jumlah ubin tidak kosong yang tidak terdapat pada susunan akhir

- Paling sedikit sejumlah $\hat{g}(P)$ perpindahan harus dilakukan untuk mentransformasikan status P ke status tujuan.

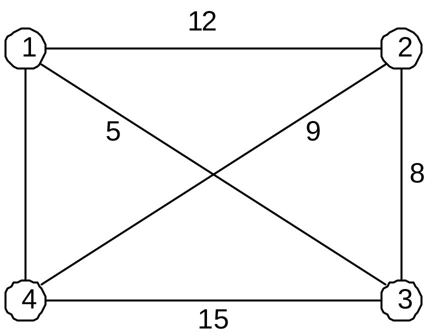

1
up
right
down
left
2
3
4
5
5
5
3
5
right
down
left
10
11
12
3
5
5
up
down
22
23
simpul solusi

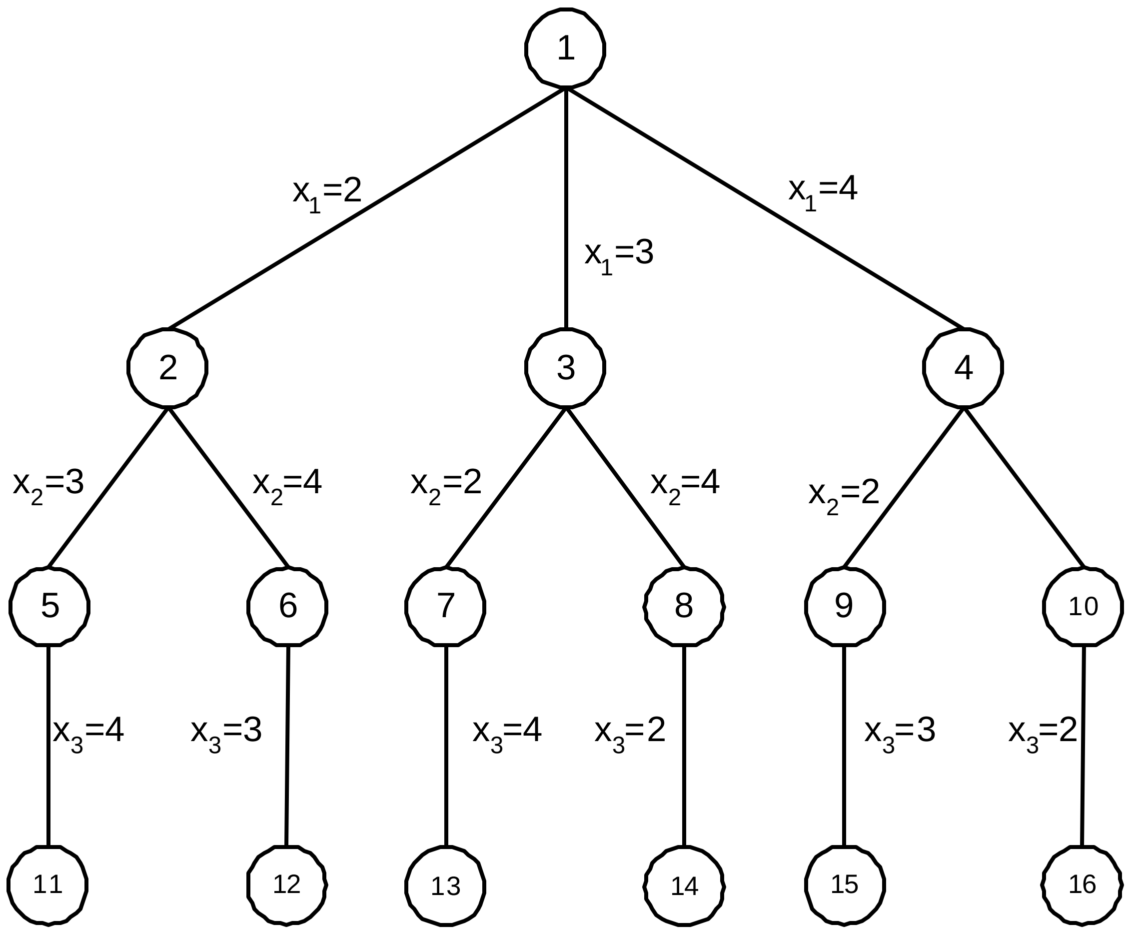
Persoalan Pedagang Keliling
(Travelling Salesperson Problem - TSP)

Misalkan
(i) $G=(V,E)$ adalah graf lengkap TSP
(ii) $|V| = n$ = jumlah simpul dalam graf G.
Simpul- simpul diberi nomor 1, 2, …, n.
(iii) c_{ij} = bobot sisi (i, j)
(iv) perjalanan (tur) berawal dan berakhir di simpul 1.
(v) S adalah ruang solusi, yang dalam hal ini
$S = \{ (1, p, 1) \mid p$ adalah permutasi $(2, 3, ..., n) \}$

Solusi TSP dinyatakan sebagai
$X = (1, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 1)$
yang dalam hal ini
$x_o = x_n = 1$ (simpul asal = simpul akhir= 1).

- Contoh instansiasi persoalan TSP:





- Ongkos atau nilai batas untuk setiap simpul dihitung dengan menggunakan matriks ongkos-tereduksi (*reduced cost matrix*) dari graf *G*.

- Sebuah matriks dikatakan tereduksi jika setiap kolom dan barisnya mengandung paling sedikit satu buah nol dan semua elemen lainnya non-negatif.

Contoh: tinjau graf lengkap berarah TSP dengan n = 5

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Lakukan reduksi baris:

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 10 \\ R_2 - 2 \\ R_3 - 2 \\ R_4 - 3 \\ R_5 - 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

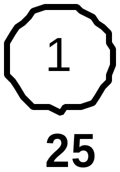
Kemudian, lakukan reduksi kolom (dari hasil reduksi baris di atas):

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ C_1 - 1 \\ C_3 - 3 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} = A$$

Total jumlah semua pengurang = (10 + 2 + 2 + 3 + 4) + (1 + 3) = 25.

Nilai 25 ini adalah nilai batas untuk simpul akar,

$$\hat{c}(root) = 25$$



Selanjutnya, misalkan A adalah matriks tereduksi untuk simpul R.

Misalkan S adalah anak dari simpul R sedemikian sehingga sisi (R, S) pada pohon ruang status berkoresponden dengan sisi (i, j) pada perjalanan.

Jika S bukan simpul daun, maka matriks bobot tereduksi untuk simpul S dapat dihitung sebagai berikut:

(a) ubah semua nilai pada baris i dan kolom j menjadi ∞. Ini untuk mencegah agar tidak ada lintasan yang keluar dari simpul i atau masuk pada simpul j;

(b) ubah $A(j, 1)$ menjadi ∞. Ini untuk mencegah penggunaan sisi $(j, 1)$;

(c) reduksi kembali semua baris dan kolom pada matriks A kecuali untuk elemen ∞.

Jika r adalah total semua pengurang, maka nilai batas untuk simpul S adalah:

$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$

Hasil reduksi ini menghasilkan matriks B.

Secara umum, persamaan fungsi pembatas adalah:

$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$

yang dalam hal ini,

$\hat{c}(S)$ = bobot perjalanan minimum yang melalui simpul *S* (simpul di pohon ruang status)

$\hat{c}(R)$ = bobot perjalanan minimum yang melalui simpul *R*, yang dalam hal ini *R* adalah orangtua dari *S*.

$A(i, j)$ = bobot sisi (i, j) pada graf *G* yang berkoresponden dengan sisi (R, S) pada pohon ruang status.

r = jumlah semua pengurang pada proses memperoleh matriks tereduksi untuk simpul *S*.

Perhitungan selanjutnya:

1. Simpul 2; Lintasan: 1, 2

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} = B$$

Tidak ada pengurangan yang dilakukan, r = 0.

$$\hat{c}(2) = \hat{c}(1) + A(1,2) + r = 25 + 10 + 0 = 35$$

2. Simpul 3; Lintasan: 1, 3

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 11 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix} C_1 - 11 \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix} = B$$

Diperoleh r = 11. Nilai batas untuk simpul 3 pada pohon ruang status:

$$\hat{c}(3) = \hat{c}(1) + A(1,3) + r = 25 + 17 + 11 = 53$$

3. Simpul 4; Lintasan: 1, 4

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = B$$

Diperoleh $r = 0$. Nilai batas untuk simpul 4 pada pohon ruang :tatus:

$$\hat{c}(4) = \hat{c}(1) + A(1,4) + r = 25 + 0 + 0 = 25$$

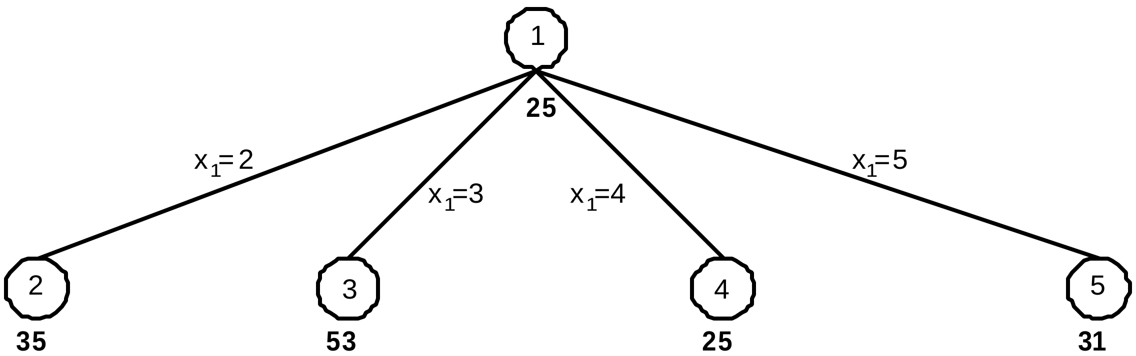
4. Simpul 5; Lintasan: 1, 5

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & 2 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 15 & 3 & 12 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2 \\ R_4 - 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 12 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} = B$$

Diperoleh r = 2 + 3 = 5. Nilai batas untuk simpul 5 pada pohon ruang status:

$$\hat{c}(5) = \hat{c}(1) + A(1,5) + r = 25 + 1 + 5 = 31$$

Pohon ruang status yang terbentuk sampai saat ini adalah:



5. Simpul 6; Lintasan: 1, 4, 2

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = C$$

Tidak ada pengurangan yang dilakukan, sehingga $r = 0$. Nilai batas untuk simpul 6 pada pohon ruang status:

$$\hat{c}(6) = \hat{c}(4) + B(4,2) + r = 25 + 3 + 0 = 28$$

6. Simpul 7; Lintasan: 1, 4, 3

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} R_3 - 2 \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} C_1 - 11 \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} = C$$

Diperoleh r = 2 + 11 = 13. Nilai batas untuk simpul 7 pada pohon ruang status:

$$\hat{c}(7) = \hat{c}(4) + B(4,3) + r = 25 + 12 + 13 = 50$$

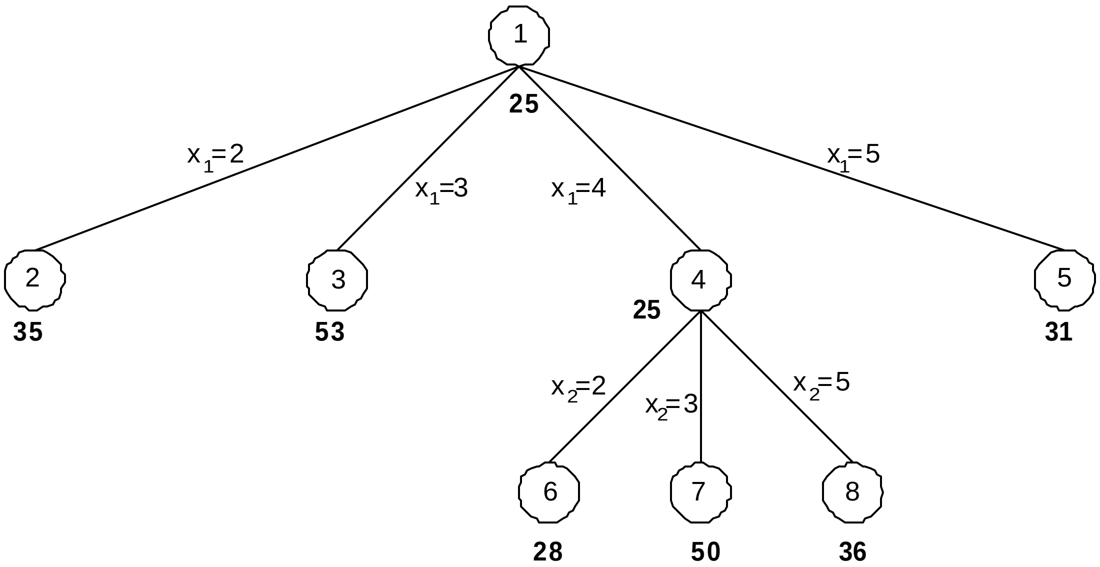
7. Simpul 8; Lintasan: 1, 4, 5

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} R_2 - 11 \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = C$$

Diperoleh r = 11. Nilai batas untuk simpul 8 pada pohon ruang status:

$$\hat{c}(8) = \hat{c}(4) + B(4,5) + r = 25 + 0 + 11 = 36$$

Pohon ruang status yang terbentuk sampai saat ini adalah:



8. Simpul 9; Lintasan: 1, 4, 2, 3

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 - 2 \\ R_5 - 11 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} = D$$

Diperoleh r = 2 + 11 = 13. Nilai batas untuk simpul 9 pada pohon ruang status:

$$\hat{c}(9) = \hat{c}(6) + C(2,3) + r = 28 + 11 + 13 = 52$$

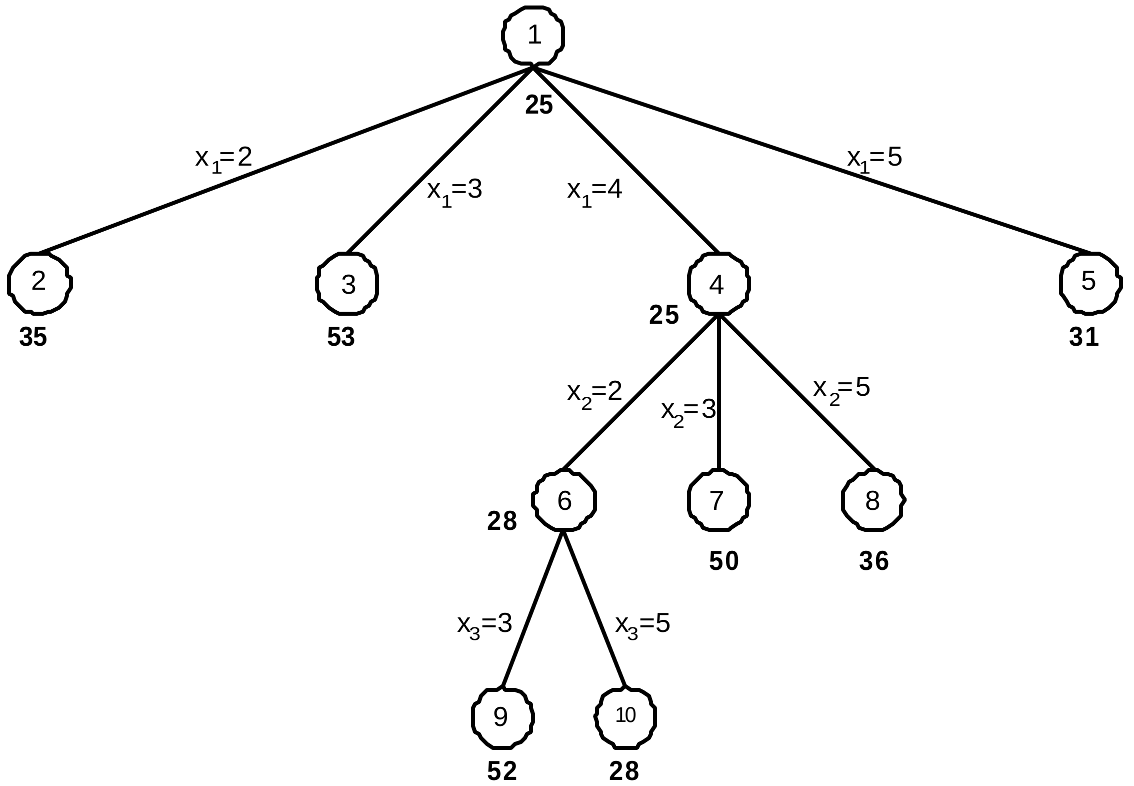
9. Simpul 10; Lintasan: 1, 4, 2, 5

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = D$$

Tidak ada pengurangan yang dilakukan, sehingga $r = 0$. Nilai batas untuk simpul 9 pada pohon ruang status:

$$\hat{c}(9) = \hat{c}(6) + C(2,5) + r = 28 + 0 + 0 = 28$$

Pohon ruang status yang terbentuk sampai saat ini adalah:



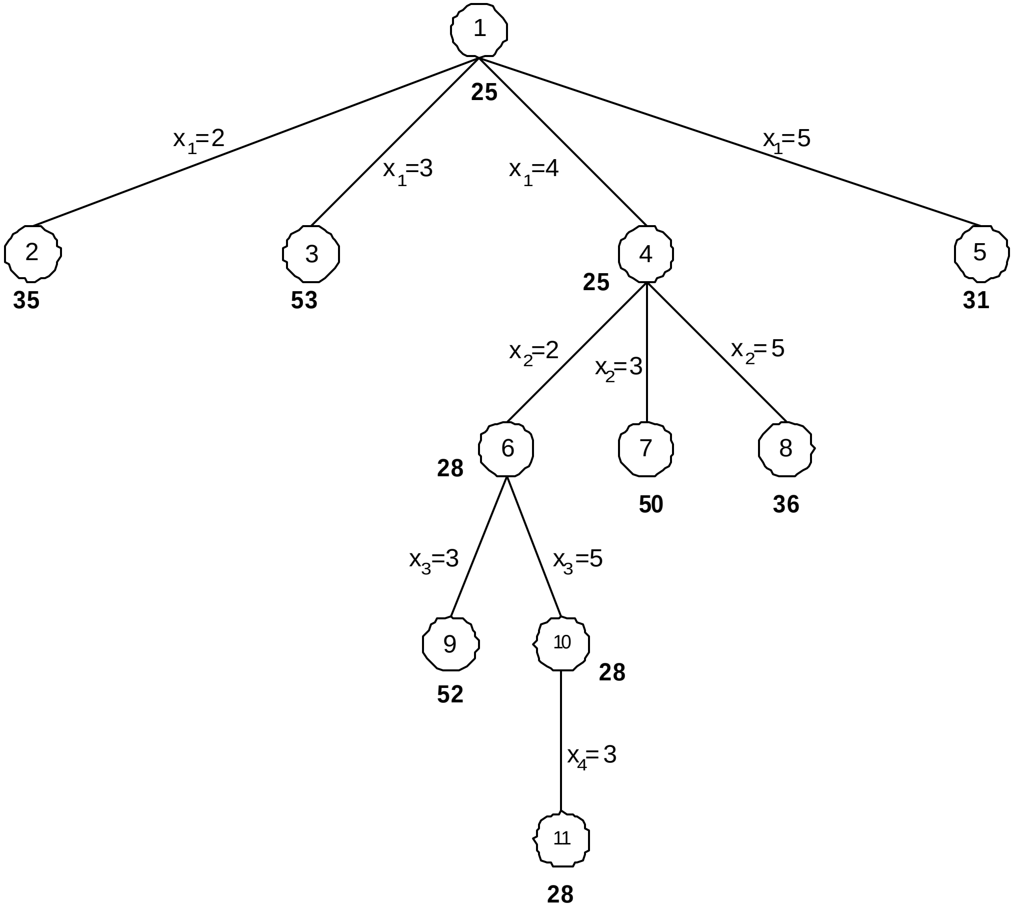
10. Simpul 11; Lintasan: 1, 4, 2, 5, 3

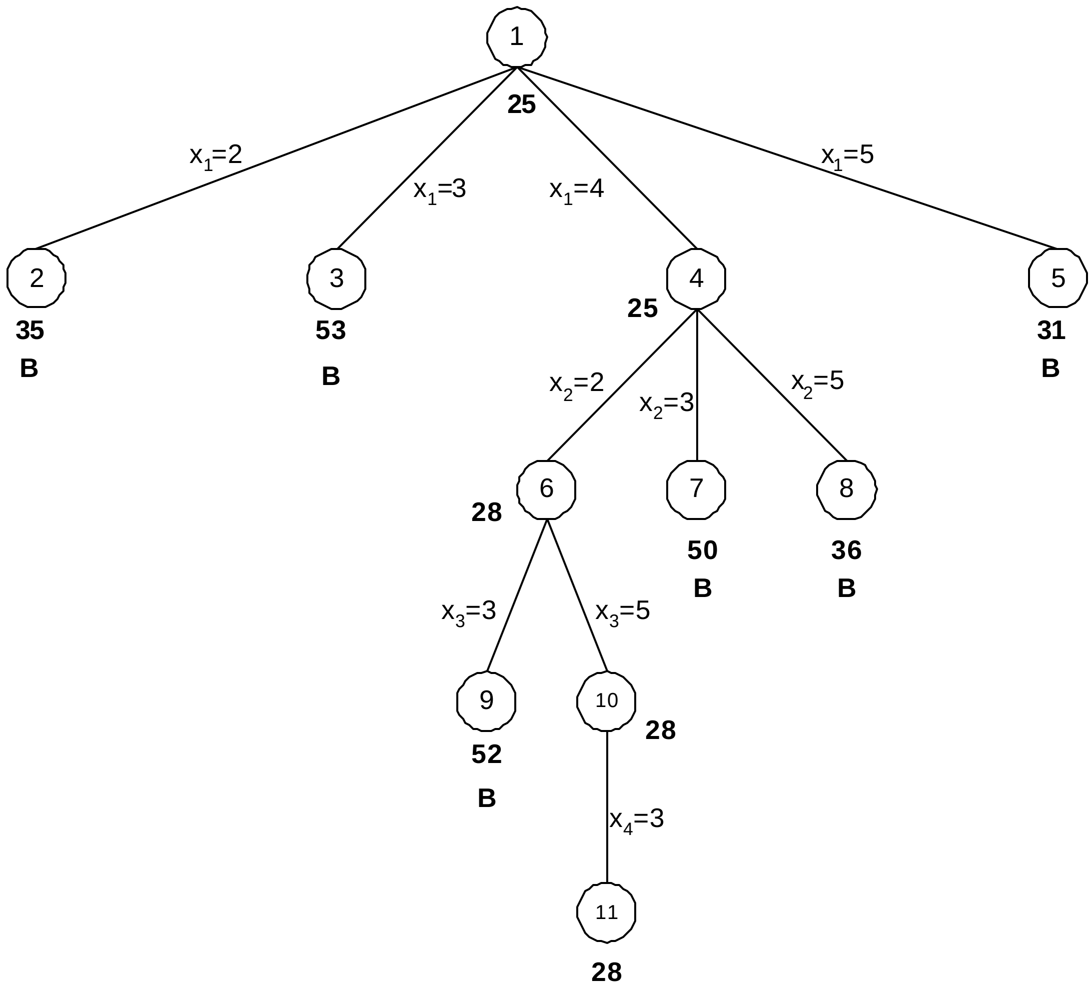
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} = E$$

Diperoleh $r = 0$. Nilai batas untuk simpul 11 pada pohon ruang status:

$$\hat{c}(11) = \hat{c}(10) + D(5,3) + r = 28 + 0 + 0 = 28$$

Pohon ruang status yang terbentuk sampai saat ini adalah:





Karena tidak ada lagi simpul hidup di dalam pohon ruang status, maka X = (1, 4, 2, 5, 3, 1) menjadi solusi persoalan TSP di atas dengan bobot 28.